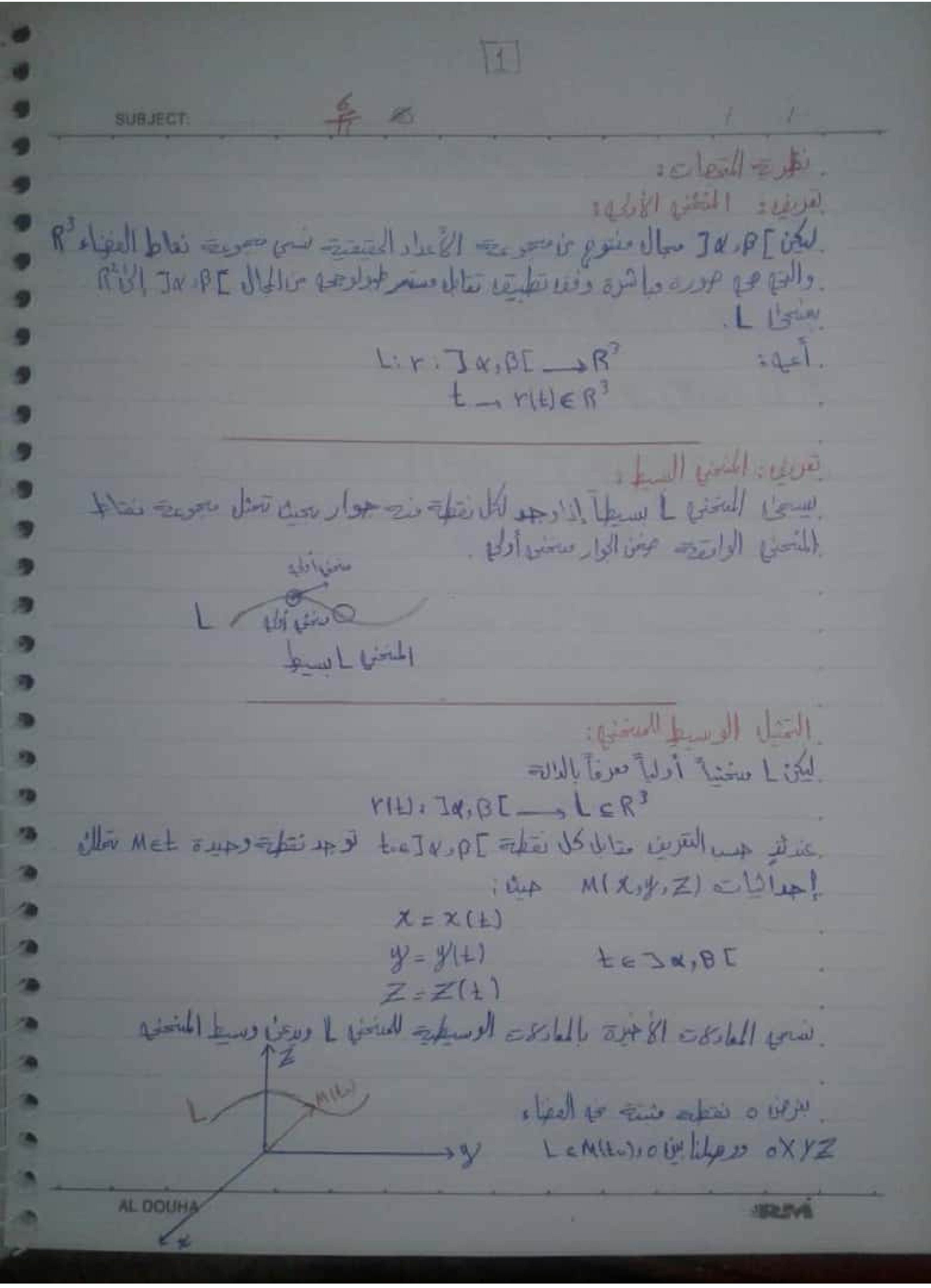


نظرية المنحنيات :

تعريف : المنحني الأولي :

ليكن]α,β[مجال مفتوح من مجموعة الأعداد الحقيقية نسمي مجموعة نقاط الفضاء R^3 والتي هي صورة مباشرة وفق تطبيق تقابل مستمر ومقلوبه من المجال]α,β[إلى R^3 بمنحنى L.

أي :

$$L: r:]\alpha,\beta[\longrightarrow R^3$$
$$t \longrightarrow r(t) \in R^3$$

تعريف : المنحني البسيط :

يسمى المنحني L بسيطاً إذا وجد لكل نقطة منه جوار بحيث تشكل مجموعة نقاط المنحني الواقعة ضمن الجوار منحنى أولي .

التمثيل الوسيطي للمنحني :

ليكن L منحنياً أولياً معرفاً بالدالة

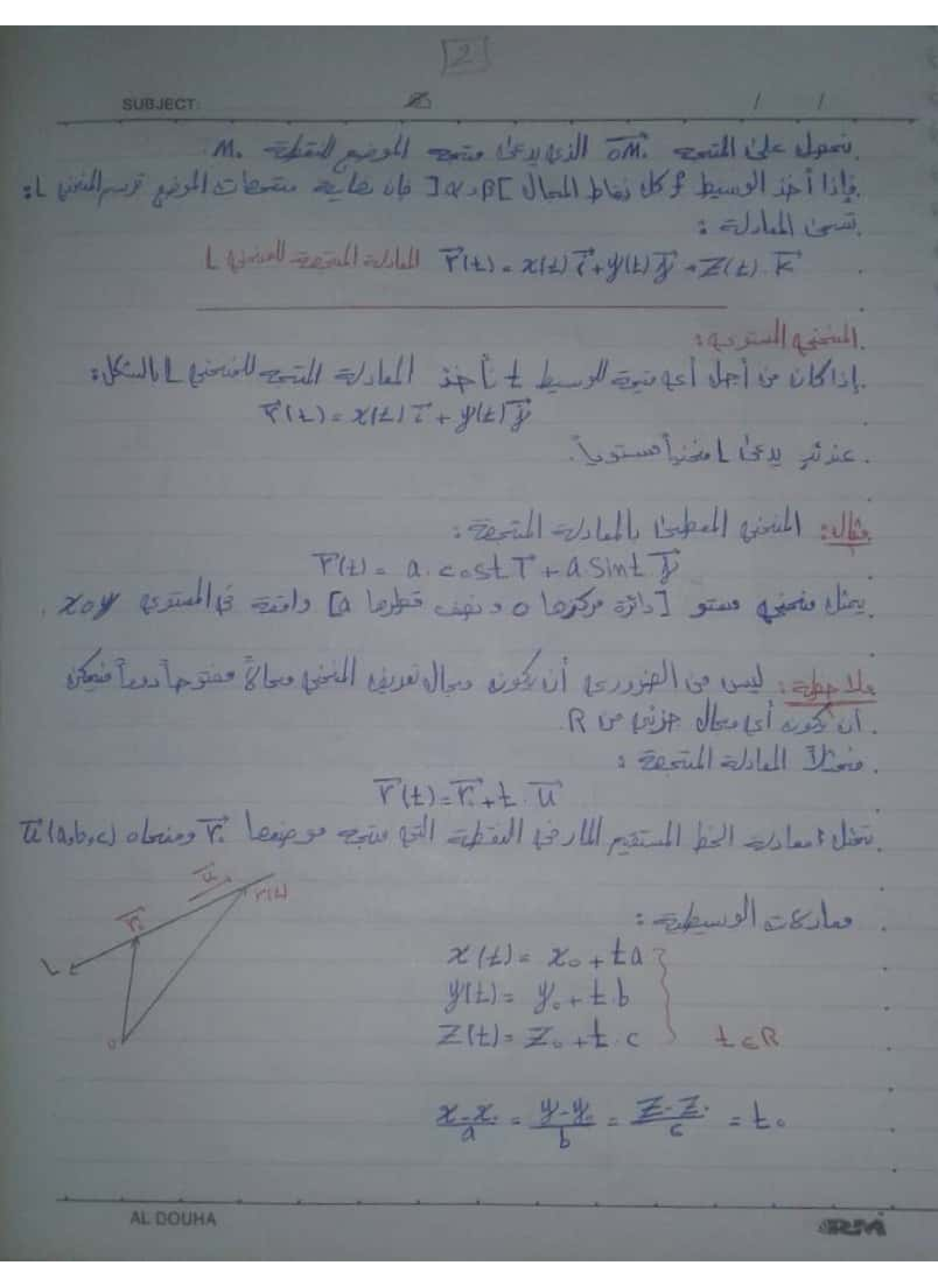
$$r(t):]\alpha,\beta[\longrightarrow L \subset R^3$$

عندئذ حسب التعريف مقابل كل نقطة $t_0 \in]\alpha,\beta[$ توجد نقطة وحيدة $M \in L$ تمثل إحداثيات $M(x,y,z)$ حيث :

$$x = x(t)$$
$$y = y(t) \qquad t \in]\alpha,\beta[$$
$$z = z(t)$$

نسمي المعادلات الأخيرة بالمعادلات الوسيطية للمنحني L ونعين وسيط المنحني

نفرض O نقطة مثبتة في الفضاء OXYZ ونصل بين O و $M(t_0) \in L$



نحصل على المتجه $\vec{OM_0}$ الذي يدعى متجه الموضع للنقطة M_0.

فإذا أخذ الوسيط t كل نقاط المجال $]\alpha , \beta[$ فإن نهاية متجهات الموضع ترسم المنحني L:

تسمى المعادلة:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j} + z(t)\,\vec{k}$$ المعادلة المتجهة للمنحني L

المنحني المستوي:

إذا كان من أجل أي قيمة للوسيط t أخذ المعادلة المتجهة للمنحني L بالشكل:

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\vec{i} + y(t)\,\vec{j}$$

عندئذ يدعى L منحنياً مستوياً.

مثال: المنحني المعطى بالمعادلة المتجهة:

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j}$$

يمثل منحني مستو [دائرة مركزها O ونصف قطرها a] واقعة في المستوي xoy.

ملاحظة: ليس من الضروري أن يكون مجال تعريف المنحني مجالاً مفتوحاً دوماً فيمكن أن يكون أي مجال جزئي من R.

مثال: المعادلة المتجهة:

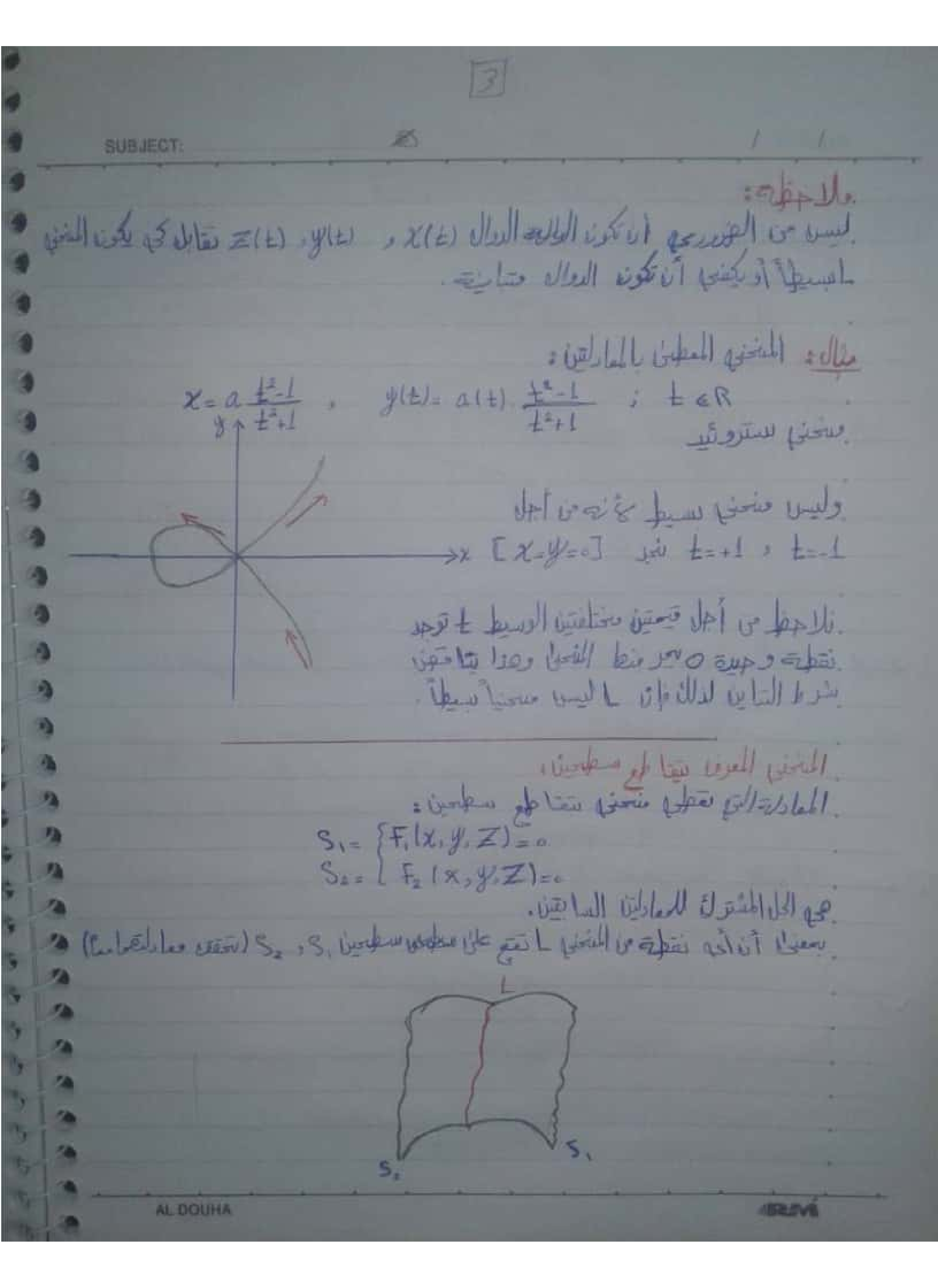
$$\vec{r}(t) = \vec{r_0} + t\,\vec{u}$$

تمثل معادلة الخط المستقيم المار في النقطة التي متجه موضعها $\vec{r_0}$ ومنحاه $\vec{u}(a,b,c)$

معادلات الوسيطية:

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + t\,a \\ y(t) = y_0 + t\,b \\ z(t) = z_0 + t\,c \end{cases} \quad t \in R$$

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} = t_0$$



SUBJECT:

ملاحظة:

ليس من الضروري أن تكون الدوال $x(t)$ و $y(t)$، $z(t)$ تقابل كي يكون المنحني L بسيطاً أو يكفي أن تكون الدوال متباينة.

مثال: المنحني المعطى بالمعادلتين:

$$x = a\frac{t^2-1}{t^2+1} \quad , \quad y(t) = a(t)\frac{t^2-1}{t^2+1} \quad ; \quad t \in R$$

منحني الستروفويد.

وليس منحني بسيط لأنه من أجل $t=-1$ ، $t=+1$ نجد $[x=y=0]$

نلاحظ من أجل قيمتين مختلفتين الوسيط t توجد نقطة وحيدة O هي مبدأ المعلم وهذا يناقض شرط التباين لذلك فإن L ليس منحنياً بسيطاً.

المنحني المعرف بتقاطع سطحين:

المعادلات التي تعطي منحني تقاطع سطحين:

$$\begin{cases} S_1 = F_1(x, y, Z) = 0 \\ S_2 = F_2(x, y, Z) = 0 \end{cases}$$

هي الحل المشترك للمعادلتين السابقتين.

بمعنى أن أي نقطة من المنحني L تقع على سطحي سطحين S_1 ، S_2 (تحقق معادلتهما)

متجه المماس لمنحنى:

ليكن L منحنياً معطى بالدالة المتجهة $\vec{r}(t)$ حيث $t \in X \subseteq R$ ولتكن M_0 نقطة من L متجه موضعها $\vec{r}(t_0)$ لنعطي الوسيط تزايداً بمقدار Δt نحصل إلى نقطة M متجه موضعها $\vec{r}(t_0+\Delta t)$

نعطي المتجه المماس لمنحنى M_0 بالنهاية:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0+\Delta t)-\vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

ونرمز له بـ $\vec{r}'(t_0)$

وكما نعلم أنه يعطى (متجه المماس) بالمعادلة المتجهة:

$$\vec{r}'(t_0) = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k} \quad (3)$$

وإن الشرط اللازم والكافي كي يكون متجه المماس موجوداً في M_0 هو أن تكون الدوال $x(t)$، $y(t)$، $z(t)$ قابلة للاشتقاق في t_0 تسمى مركبات متجه المماس في t_0 نسمي العدد الموجب $\sqrt{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)+z'^2(t_0)}$ طويلة المتجه المماس نرمز لها بـ $|\vec{r}'(t_0)|$

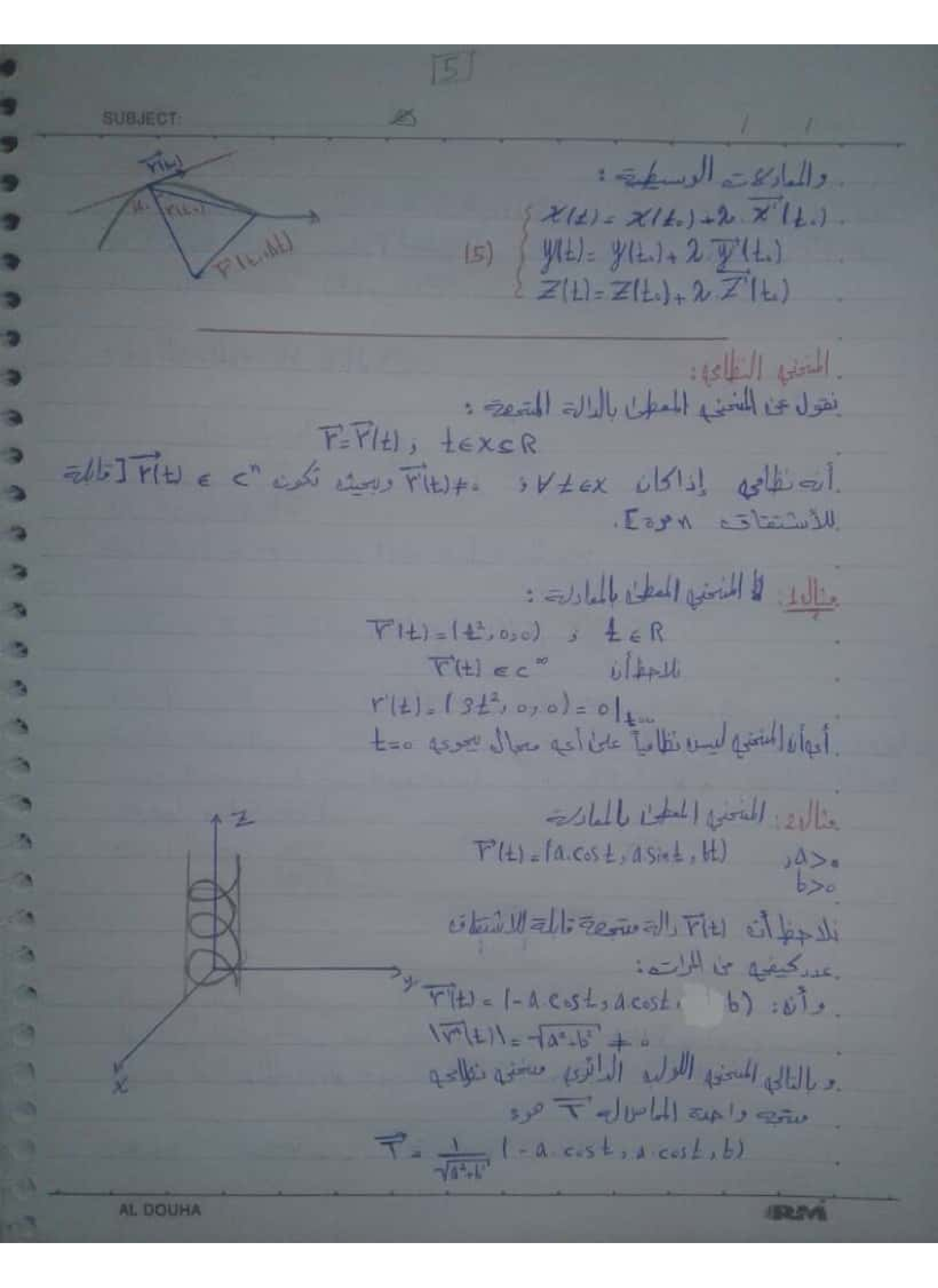
ونسمي المتجه $\frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}$ متجه واحدة المماس ونرمز له بـ $\vec{T}$ أي:

$$\vec{T} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|} \quad (4)$$

المستقيم المماس للمنحنى:

المستقيم المماس للمنحنى في نقطة M_0 متجه موضعها $\vec{r}(t_0)$، $\vec{r}'(t_0)$ متجه المماس في M_0 هو الخط المار من M_0 ويوازي $\vec{r}'(t_0)$ معادلته المتجهة من الشكل:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}'(t_0) \quad , \lambda \in R$$



والمعادلات الوسيطية :

$$(5)\quad \begin{cases} x(t) = x(t_0) + \lambda\, \overrightarrow{x'}(t_0) \\ y(t) = y(t_0) + \lambda\, \overrightarrow{y'}(t_0) \\ z(t) = z(t_0) + \lambda\, \overrightarrow{z'}(t_0) \end{cases}$$

المنحني النظامي :

نقول عن المنحني المعطى بالدالة المتجهة :

$$\vec{r} = \vec{r}(t)\ ;\ t \in X \subseteq \mathbb{R}$$

أنه نظامي إذا كان $\forall t \in X$; $\vec{r'}(t) \neq 0$ وبحيث تكون $\vec{r}(t) \in C^n$ [قابلة للاشتقاق n مرة].

مثال 1 : لا المنحني المعطى بالمعادلة :

$$\vec{r}(t) = (t^3, 0, 0)\ ;\ t \in \mathbb{R}$$

نلاحظ أن $\vec{r}(t) \in C^\infty$

$$r'(t) = (3t^2, 0, 0) = 0|_{t=0}$$

أي أن المنحني ليس نظامياً على أي مجال يحوي $t=0$

مثال 2 : المنحني المعطى بالمعادلة

$$\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)\quad ; a>0,\ b>0$$

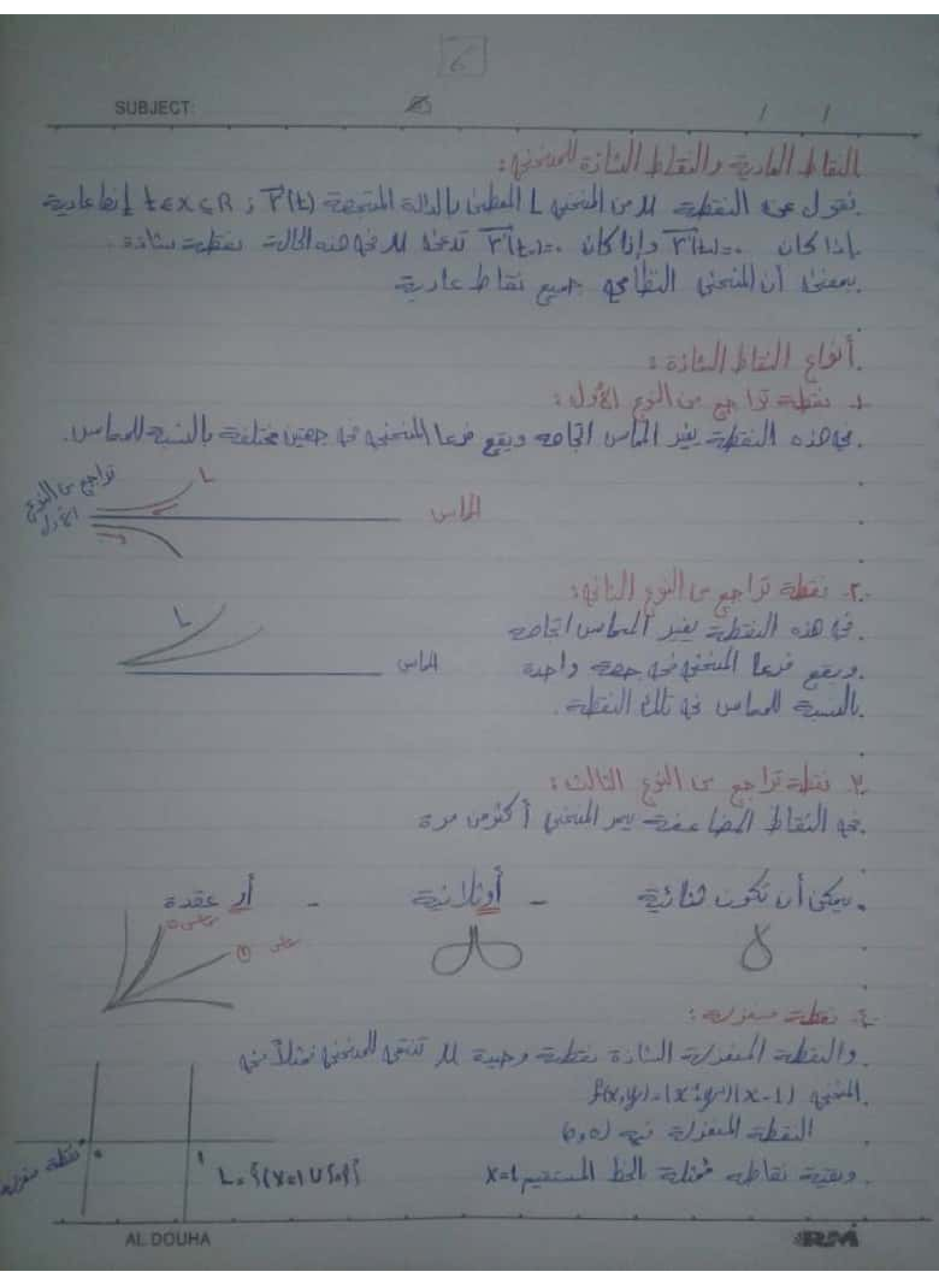
نلاحظ أن $\vec{r}(t)$ دالة متجهة قابلة للاشتقاق عدد كيفي من المرات :

وأن : $\vec{r'}(t) = (-a\cos t, a\cos t, b)$

$$|\vec{r'}(t)| = \sqrt{a^2+b^2} \neq 0$$

وبالتالي المنحني اللولبي الدائري منحني نظامي متجه واحدة المماس له $\vec{T}$ هو

$$\vec{T} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(-a\cos t, a\cos t, b)$$



النقاط العادية والنقاط الشاذة للمنحني:

. نقول عن النقطة M من المنحني L المعطى بالدالة المتجهة $F(t)$; $t \in X \subseteq R$ إنها عادية

. إذا كان $F'(t) \neq 0$ وإذا كان $F'(t) = 0$ تدعى M في هذه الحالة نقطة شاذة.

. بمعنى أن المنحني النظامي جميع نقاطه عادية.

. أنواع النقاط الشاذة:

1. نقطة تراجع من النوع الأول:

. في هذه النقطة يغير المماس اتجاهه ويقع فرعا المنحني في جهتين مختلفتين بالنسبة للمماس.

2. نقطة تراجع من النوع الثاني:

. في هذه النقطة يغير المماس اتجاهه
. ويقع فرعا المنحني في جهة واحدة
. بالنسبة للمماس في تلك النقطة.

3. نقطة تراجع من النوع الثالث:

. هي النقاط المضاعفة يمر المنحني أكثر من مرة

. يمكن أن تكون ثنائية - أو ثلاثية - أو عقدة

4. نقطة منعزلة:

. والنقطة المنعزلة الشاذة نقطة وحيدة لا تنتمي للمنحني مثلاً في
. المنحني $f(x,y) = (x^2+y^2)(x-1)$
النقطة المنعزلة هي $(0,0)$
. وبقية نقاطه ممثلة الخط المستقيم $x=1$